المحاضرة الخامسة

- **تباين مقدرة القاطع:**

ان تبـاين اي قيمـة تتـوزع حـول وسـط معين هـو معدل تشتت هذه القيم عن الوسـط الحسـابي لهـا ويكون القانون الخاص بتباين مقدرة القاطع:

$$V(\hat{\alpha}) = E\{\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})\}^2$$

وبإجراء بعض الخطوات يمكن برهنة تباين $\hat{\alpha}$ وكما يلي:

1- بما اننا اوجدنا في الخاصية الثانية ان:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}w) * U$$

2- بالتعويض عن $\hat{\alpha}$في معادلة ($V(\hat{\alpha})$ نحصل على:

$$V(\hat{\alpha}) = E\left[\alpha + \sum\left(\frac{1}{n} - \bar{X}w_i\right)U_i - \alpha\right]^2 = E\left[\sum\left(\frac{1}{n} - \bar{X}w_i\right) * U_i\right]^2 = \sum E\left(\frac{1}{n} - \bar{X}w_i\right)^2 * U_i^{\,2}$$

3- بضرب الاقواس معا واجراء العمليات الحسابية نحصل على:

$$V(\hat{\alpha}) = V(U)\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^{\,2}}\right]$$

4- بتوحيد المقام:

$$V(\hat{\alpha}) = V(U)\left[\frac{\sum x_i^{\,2}}{n\sum x_i^{\,2}} + \frac{n\bar{X}^2}{n\sum x_i^{\,2}}\right]$$

5- بما ان:

$$\sum x_i^{\,2} = \sum(X_i - \bar{X})^2$$

6- وبعد فتح الاقواس واجراء عملية التبسيط نحصل على:

$$\sum x_i^{\,2} = \sum X_i^{\,2} - n\bar{X}^2$$

7- وبتعويض النتيجة في الخطوة 6 في معادلة التباين بالخطوة 4 نحصل على:

$$V(\hat{\alpha}) = V(U)\left[\frac{\sum x_i^{\,2}}{n\sum x_i^{\,2}}\right]$$

والذي يمكن كتابته كما يلي:

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum X^2}{n\sum x^2}$$

ان الصيغة (   ) تمثل تباين تقدير معلمة القاطع، كما توجد صيغة أخرى للتباين وهي:

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2\{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x^2}\}$$

- **تباين المعلمة المقدرة للميل الحدي:**

ان المقصود بتباين $b^{\wedge}$ ذلك التباين ما بين القيمة المقدرة للمعلمة $b^{\wedge}$ لكل عينة من العينات باستخدام المقدر $b^{\wedge}$ والقيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع b الاصلية ومن ثم يمكن إيجاد الصيغة الرياضية لتباين $b^{\wedge}$ كالتالي:

$$V(\hat{\beta}) = \{\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\}^2$$

بما اننا اوجدنا في الخاصية الثانية ان:

$$b^{\wedge} = b + \sum w_i U$$

وبالتعويض عن $b^{\wedge}$ في معادلة $V(\hat{\beta})$ نحصل على:

$$v(b^{\wedge}) = E(b + \sum w_i U - b)^2 = E(\sum w_i U)^2 = E(w_1 U_1 + ... + w_n U_n)^2$$

وبعد عملية فتح الاقواس وإدخال التربيع نحصل على:

$$v(b^{\wedge}) = \sum w_i^{\,2} EU^2 + \sum\sum w_i w_j EU_i U_j = V(U)\sum w_i^{\,2}$$

لذلك فان التباين الخاص بـ $\hat{\beta}$ هو:

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}$$

- **التباين المشترك بين المعالم المقدرة:**

يمكن إيجاد التباين المشترك لمعالم نموذج الانحدار المقدر وذلك كما يلي:

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = E\left[\{\hat{\alpha} - E\hat{\alpha}\}\{\hat{b} - E\hat{b}\}\right] = E\left[\{\hat{\alpha} - \alpha\}\{\hat{b} - \beta\}\right]$$

وبما ان:

$$b^{\wedge} = b + \sum w_i U$$

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}w) * U$$

وبالتعويض عن $\hat{\alpha}, \hat{b}$ في $Cov(\hat{\alpha}, \hat{b})$:

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = E\left[\left\{\alpha + \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}w) * U - \alpha\right\}\left\{\beta + \sum w_i U - \beta\right\}\right]$$

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = E\left[\left\{\sum(\frac{1}{n} - \bar{X}w) * U\right\}\left\{\sum w_i U\right\}\right]$$

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \sum E(\frac{1}{n} - \bar{X}w) * U * w_i * U = \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}w) * w_i * EU^2$$

وبعد عملية فتح الاقواس والتبسيط نحصل على:

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -V(U) * \frac{\bar{X}}{\sum x_i^{\,2}} = -\sigma^2 * \frac{\bar{X}}{\sum x_i^{\,2}}$$

3.4 الاتساق Consistency

يعتبر المقدر متسقا لمعلمة المجتمع الاصلية إذا توفرت فيه ما يلي:

- خاصية عدم التحيز

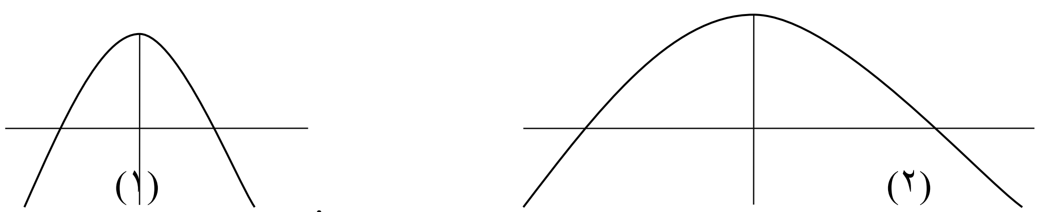
- اقتراب تباين المعلمة المقدرة من الصفر عندما يؤول حجم العينة n الى ما لا نهاية.
ويمكن اثبات توافر خاصية الاتساق في مقدرات المربعات الصغرى رياضيا كالتالي:
- بالنسبة لمقدر معلمة الميل الحدي
بما ان تباين المقدر $b^{\wedge}$ يأخذ الصيغة الرياضية التالية:

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}$$

4- الكفاءة (اقل تباين) Efficiency

الخاصية الثالثة لمقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين هذه الخاصية لها أهمية بالغة في الاقتصاد القياسي لان آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعني أعلى دقة من ناحية القياسات.

هناك علاقة عكسية بين التباين ودقة القياسات كلما زاد التباين كلما انخفضت دقة القياسات وكلما قل ارتفعت دقة القياسات. لأن مقدرات م ص ع $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ تلك المقدرات تمتلك آدني تباين نعني مقارنه بمقدرات أخرى تقاس بطريقه مختلفة عن م ص ع فان مقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين إي تتحلى بأعلى دقه. نفترض إن هناك مقدرات لـ α β تحصل عليها بطريقه مختلفة ونفترض إن المقدرات الأخرى α'', β'' ا ذا افترضنا أن تلك المقدرتين خطيه وغير متحيزة سيكون الاختلاف في خاصية أن مقدرات م ص ع $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ تمتلك أعلى دقة.



$$E(\hat{\beta}) = \beta \qquad\qquad E(\beta'') = \beta$$

$$V(\hat{\beta}) \;<\; V(\beta'')$$

في الحالة (١) استخدمت مقدرات م ص ع . في الحالة الثانية (٢) مقدرات أخرى غير م ص ع ، في الشكل التوزيع الاحتمالي لقيمة المقدرات $\hat{\beta}, \beta''$. في (١) يتبين ان التباين قليل، درجة الانتشار لـ $\hat{\beta}$ اقل وبالتالي تتمركز قيم $\hat{\beta}$ حول القيمة الحقيقية وفي الشكل (٢) قد نحصل على قيم حول β لكنها بعيده عن المعلمة الحقيقية.

من الشكل إن احتمال الحصول على $\hat{\beta}$ أقرب للمعلمة الحقيقية من β'', وبالتالي درجة احتمال العثور على $\hat{\beta}$ أقرب مما سواها، هذا ما يقصد بخاصية أدنى تباين.

من النتائج التي توصلنا أليها عن مقدرات م ص ع يمكن أن نقول أن شـــكل التوزيع الاحتمالي الخاص بالمقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$

$$\hat{\alpha} \sim N\left[\alpha, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x^2}\right)\right], \quad \hat{\beta} \sim N\left[\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]$$

من المعادلتين يتبين انه :

١- كلما زاد التباين σ^2 كلما زاد تباين المقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

٢-كلما كان انتشار قيم X اكبر كلما قل تباين $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$